Analiza zespolona
Lista 6

Zad 1. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{1}{\xi}\, d\xi,$$

gdzie γ jest dowolnie wybraną krzywą nieprzechodzącą przez zero i łączącą punkty 1 i z.

Zad 2. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} z-1+\frac{1}{(z-1)^2}\, dz,$ b) $\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} \overline{z}\, dz,$ c) $\displaystyle\int_{[1+i,1-i]} ze^{z^2}\, dz.$

Zad 3. Niech $f(z) = Rez$ i niech Γ będzie

a) odcinkiem o początku i i końcu $-i$,

b) lewym półokręgiem łączącym punkty $-i$ i i,

c) prawym półokręgiem łączącym punkty $-i$ i i.

Obliczyć całkę $\int_\Gamma f(z)\, dz$.

Zad 4. Obliczyć całki $\displaystyle\int_K f(z)\, dz$, gdzie

a) $f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, K jest pierwszą ćwiartką okręgu o promieniu R i środku w (0,0) skierowaną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

b) $f(z) = \cos z$, K to łuk półokręgu o promieniu 1 łaczący punkty $z_0 = -i, z_1 = i$,

c) $f(z) = \sin(\overline{z})$, K to łamana zamknięta o wierzchołkach $z = 0, z = \frac{\pi}{2}, z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}i$,

d) $f(z) = ze^z$, K jest łukiem elipsy $x^2 + 2y^2 = 1$ leżącym w pierwszej ćwiartce łączącym punkty $z_0 = 1, z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}$,

e) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$, K jest łukiem paraboli $y = x^2$ łączacym punkty $z_0 = 0, z_1 = 1 + i$,

f) $f(z) = e^{\overline{z}}$, K jest odcinkiem o początku $z = 1$ i końcu $z = i$,

g) $f(z) = Re(z)$, K jest częścią krzywej łączącej punkt $(0, 0)$ z punktem $(1, 1)$,

h) $f(z) = z + \frac{1}{z^2}$, $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 2\}$.

Zad 5. Obliczyć całki $\displaystyle\int_K f(z)\, dz$, gdzie

a) $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$, $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

b) $f(z) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}iz)}{(z^2+4)^3}$, K jest elipsą $x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$,

c) $f(z) = \frac{e^z \sin(z)}{1+z^2}$, K jest okręgiem $|z - (2 + i)| = \sqrt{2}$,

d) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, K jest elipsą $x^2 + 4y^2 = 1$,

e) $f(z) = \frac{z\sin(\pi z)}{z^4-1}$, K jest łamaną zamkniętą łączącą punkty $0, -2 + i, -2 - i$,

f) $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$, K jest łamaną skierowaną dodatnio o wierzchołkach $1, i, -1, -i$,

g) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}$, K jest okręgiem $|z| = 2$ skierowanym dodatnio,

h) $f(z) = \frac{\sinh z}{(z+2i)^2}$, K jest okręgiem $|z| = 3$ skierowanym ujemnie.